ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ SỸ DŨNG

MA TRẬN ĐƠN MÔĐULA VÀ CÁC ĐA DIỆN NGUYÊN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ SỸ DŨNG

MA TRẬN ĐƠN MÔĐULA VÀ CÁC ĐA DIỆN NGUYÊN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. TRẦN VŨ THIỆU

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Mở đầu

Trong lĩnh vực tối ưu hóa, các ma trận giữ một vai trò quan trọng và thường có liên quan tới các lớp bài toán tối ưu khác nhau. Chẳng hạn, các ma trận (nửa) xác định dương (âm) gắn với các bài toán tối ưu lồi hay lõm, ma trận không xác định gắn với các bài toán tối ưu toàn cục (tối ưu phi tuyến không lồi)...

Trong các ma trận thực, các ma trận đơn môđula (vuông cấp n, nguyên, định thức ± 1) và các ma trận đơn môđula tuyệt đối (cấp $m \times n$, mọi định thức con của nó bằng 0 hay ± 1) có các tính chất đặc biệt, rất được chú ý trong tối ưu nguyên.

Các ma trận đơn môđula tuyêt đối và các mở rộng (ma trận cân đối, hoàn hảo và lý tưởng) liên quan chặt chẽ với tập đa diện nguyên (mọi đỉnh của nó có các tọa độ nguyên) và gần nguyên (các điểm nguyên của nó là đỉnh). Chẳng hạn, đa diện của bài toán vận tải, bài toán ghép cặp, bài toán phủ cạnh trong đồ thị hai phần, bài toán phân hoạch tập,... có mọi đỉnh là nguyên.

Nhiều vấn đề thực tế có thể diễn đạt dưới dạng bài toán qui hoạch tuyến tính nguyên trên các tập đa diện nguyên hay gần nguyên. Vì thế có thể sử dụng các thuật toán đơn hình quen thuộc để tìm nghiệm nguyên của bài toán.

Các tác giả sách tham khảo [2] - [6] đề cập tới các ma trận đơn môđula, đơn môđula tuyệt đối và các tập đa diện nguyên (gần nguyên), cùng nhiều bài toán tối ưu tuyến tính nguyên có liên quan. Các tài liệu [2] - [6] bao gồm nhiều kết quả hay và có ý nghĩa khoa học, được nhiều người quan tâm học tập, nghiên cứu.

Sau khi được học các chuyên đề về giải tích lồi, tối ưu hóa và các kiến thức có liên quan, với mong muốn tìm hiểu sâu hơn về những kiến thức đã học, các kiến thức mở rộng và ứng dụng của những kiến thức này, chúng tôi chọn đề tài luận văn

"Ma trận đơn môđula và các đa diện nguyên".

Mục đích chính của đề tài: Tìm hiểu và trình bày các kết quả chính đã có về các đa diện nguyên và gần nguyên, dựa trên các ma trận đơn môđula tuyệt đối và đề cập tới một số bài toán tối ưu nguyên, thường gặp trong lý thuyết và ứng dụng. Luận văn được viết dựa chủ yếu trên các tài liệu tham khảo [1] - [6].

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu: Ma trận đơn môđula, phép biến đổi đơn môđula và ma trận đơn môđula tuyệt đối, đa diện nguyên và gần nguyên, và một số bài toán tối ưu nguyên hay gặp trong lý thuyết và ứng dụng.

Phương pháp nghiên cứu: Tổng hợp các kiến thức thu nhận được từ các tài liệu tham khảo liên quan đến đề tài luận văn, vận dụng các phương pháp nghiên cứu của giải tích, giải tích lồi và tối ưu hóa.

Dự kiến đóng góp mới của luận văn: Tổng hợp và giới thiệu có chọn lọc các kết quả về ma trận đơn môđula, đơn môđula tuyệt đối, về tập đa diện nguyên và gần nguyên, và một số bài toán tối ưu nguyên hay gặp.

Nội dung của luận văn gồm ba chương:

Chương 1 **"Kiến thức chuẩn bị"** nhắc lại vắn tắt các khái niệm, định nghĩa và kết quả cơ bản về tập lồi và tập lồi đa diện (đỉnh, cạnh, diện), về bài toán qui hoạch tuyến tính và bài toán đối ngẫu (điều kiện tối ưu, thuật toán đơn hình gốc và đối ngẫu), về bài toán qui hoạch tuyến tính nguyên và phi tuyến nguyên.

Chương 2 **"Ma trận đơn môđula và đơn môđula tuyệt đối"** trình bày khái niệm ma trận đơn môđula, phép biến đổi đơn môđula và một số kết quả liên quan đến tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình tuyến tính. Tiếp theo trình bày khái niệm ma trận đơn môđula tuyệt đối: các tính chất, ví dụ và một số tiêu chuẩn nhận biết ma trận đơn môđula tuyệt đối.

Chương 3 **"Tập đa diện nguyên và gần nguyên"** đề cập tới các tập đa diện nguyên và gần nguyên, mô tả điều kiện để có các tập đa diện nguyên và xét một số bài toán tối ưu trên tập đa diện nguyên, gần nguyên (bài toán vận tải, bài toán sắp xếp tập, phủ tập và phân hoạch tập). Đa diện nguyên và gần nguyên liên quan chặt chẽ với các ma trận đơn môđula tuyệt đối và các mở rộng (ma trận cân đối, ma trận hoàn hảo và ma trận lý tưởng).

Do thời gian có hạn nên luận văn này chủ yếu chỉ dừng lại ở việc tìm hiểu, tập hợp tài liệu, sắp xếp và trình bày các kết quả nghiên cứu đã có theo chủ đề đặt ra. Trong quá trình viết luận văn cũng như trong xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi có những sai sót nhất định. Tác giả luận văn rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Nhân dịp này, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy hướng dẫn GS.TS. Trần Vũ Thiệu đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các GS, PGS, TS của Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học Thái Nguyên và của Viện Toán học đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, ngày 01 tháng 11 năm 2015

Tác giả luận văn

Vũ Sỹ Dũng

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này giới thiệu vắn tắt một số kiến thức cơ bản cần thiết về giải tích lồi (tập lồi và tập lồi đa diện), bài toán qui hoạch tuyến tính (nghiệm cơ sở, điều kiện tối ưu, phương pháp đơn hình...) và về bài toán qui hoạch tuyến tính nguyên. Nội dung trình bày ở chương này chủ yếu dựa trên các tài liệu [1], [3].

1.1 TẬP LỒI VÀ TẬP LỒI ĐA DIỆN

1.1.1 Tập afin

Trước hết là những khái niệm liên quan tới tập afin.

Định nghĩa 1.1. Một tập $M \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập afin* nếu

$$\forall a, b \in M, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda b + (1 - \lambda)a \in M,$$

tức là hễ M chứa hai điểm nào đó thì M chứa cả đường thẳng qua hai điểm ấy.

Một số tính chất cơ bản của các tập afin:

- □ Nếu M là tập afin thì $a + M = \{a + x : x \in M\}$ cũng là tập afin $\forall a \in \mathbb{R}^n$.
- □ M là tập afin chứa gốc khi và chỉ khi M là một không gian con của $\mathbb{R}^n$.
- □ Giao của một họ bất kỳ tập afin cũng là một tập afin.
- □ Nếu $x^1, ..., x^k$ thuộc tập afin M thì mọi tổ hợp afin của chúng cũng thuộc M, tức là $x^i \in M (i = 1, ..., k), \lambda_1 + ... + \lambda_k = 1 \Rightarrow \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k \in M$.

□ Một tập afin bất kỳ có dạng $M = \{x : Ax = b\}$ với $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$.

Ngược lại, mọi tập có dạng trên đều là tập afin. (Đó là nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính).

Bao afin của một tập M là giao của tất cả các tập afin chứa E, ký hiệu $aff(E)$. Đó là tập afin nhỏ nhất chứa E.

Từ các tính chất của tập afin suy ra:

$$x \in aff(E) \Longleftrightarrow x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, x_i \in E, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Có thể thấy: Một tập $M \neq \phi$ là afin khi và chỉ khi $M = x^0 + L$ với $x^0 \in M$ và L là một không gian con. L được xác định một cách duy nhất và được coi là không gian con *song song* với M. (M nhận được bằng cách tịnh tiến L tới x^0).

Định nghĩa 1.2. *Thứ nguyên (số chiều)* của một tập afin M là số chiều của không gian con song song với nó.

Định nghĩa 1.3. Một tập afin trong $\mathbb{R}^n$ có thứ nguyên $n-1$ được gọi là một *siêu phẳng*. Có thể thấy siêu phẳng là tập có dạng $H = \{x : a^T x = \alpha\}$ với $a \in \mathbb{R}^n (a \neq 0), \alpha \in \mathbb{R}$. (Đó là tập nghiệm của một phương trình tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$). Một tập có dạng $H = \{x : a^T x \leqslant (\geqslant)\alpha\}$ (hay $H = \{x : a^T x < (>)\alpha\}$) được gọi là *một nửa không gian* đóng (hay mở) (tập nghiệm của một hệ bất phương trình).

Định nghĩa 1.4. Một tập k điểm $x^1, x^2, ..., x^k$ gọi là *độc lập afin* nếu $k-1$ véctơ $x^2 - x^1, ..., x^k - x^1$ độc lập tuyến tính.

Tồn tại duy nhất một siêu phẳng đi qua n điểm độc lập afin cho trong $\mathbb{R}^n$.

1.1.2 Tập lồi

Sau đây là một số khái niệm liên quan đến tập lồi.

Định nghĩa 1.5. Tập hợp $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là lồi nếu

$$\forall a, b \in C, 0 \leq \lambda \leqslant 1 \Rightarrow \lambda b + (1-\lambda)a \in C,$$

tức là hễ C chứa hai điểm nào đó thì nó chứa cả đoạn thẳng nối hai điểm ấy.

Có thể thấy tập hợp rỗng, tập hợp gồm một điểm, toàn không gian $\mathbb{R}^n$, mọi tập afin, siêu phẳng, nửa không gian (đóng, mở), hình cầu,... đều là những tập lồi. Trong $\mathbb{R}^2$, các hình tam giác, hình vuông, hình tròn, hình elip đều là các tập hợp lồi. Tuy nhiên, đường tròn hay hình vành khăn không phải là tập hợp lồi.

Thứ nguyên hay số chiều của một tập lồi C là thứ nguyên của bao afin của C. Trong $\mathbb{R}^n$ một tập lồi thứ nguyên n được gọi là tập lồi thứ nguyên *đầy đủ*.

Sau đây là một số tính chất cơ bản của các tập lồi:

- ☐ Giao của một họ bất kỳ các tập lồi cũng là một tập lồi.

- ☐ Nếu C, D là tập lồi thì $C + D = \{x + y : x \in C, y \in D\}, \alpha C = \{\alpha x : x \in C\}$ và $C - D = C + (-1)D$ cũng là tập lồi. Nếu $C \subset \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^m$ là tập lồi thì tích $C \times D = \{(x + y) : x \in C, y \in D\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ cũng là tập lồi.

- ☐ Nếu $x^1, ..., x^k$ thuộc tập lồi C thì mọi tổ hợp lồi của chúng cũng thuộc C, tức là $x^i \in C, \lambda_i \geq 0 \ (i = 1, ..., k), \lambda_1 + ... + \lambda_k = 1 \Rightarrow \lambda_1 x^1 + ... + \lambda_k x^k \in C$.

- ☐ Nếu tập lồi $C \subset \mathbb{R}^n$ không giới nội thì có véctơ $d \in \mathbb{R}^n (d \neq 0)$ sao cho với mọi $x \in C$ tia $x + \lambda d, \lambda \geqslant 0$ nằm trọn trong C. Một véctơ d như thế gọi là một *phương vô hạn* của tập lồi C.

  Cho một tập bất kỳ $E \subset \mathbb{R}^n$. Giao của tất cả các tập lồi chứa E được gọi là *bao lồi* của E, ký hiệu $conv(E)$. Đó là tập lồi nhỏ nhất chứa E. Có thể thấy:

- ☐ $conv(E)$ trùng với tập tất cả các tổ hợp lồi của các phần tử thuộc E.

- ☐ Bao đóng và phần trong của một tập lồi cũng là các tập lồi.

Cho $C \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi. Điểm $x \in C$ gọi là *điểm cực biên* của C nếu x không thể biểu diễn dưới dạng một tổ hợp lồi của hai điểm phân biệt bất kỳ khác thuộc C, nghĩa là không tồn tại hai điểm $y, z \in C, y \neq z$ sao cho

$$x = \lambda y + (1 - \lambda) z \text{ với } 0 < \lambda < 1.$$